Asymptotic Fields in the $lambda(phi^4)_2$ QFT with Space Cutoff (ハミルトニアンの定義とスペクトル)

加藤, 祐輔; 麦林, 布道

数理解析研究所講究録
118巻 1971年 49-58

Asymptotic Fields in the $\lambda(\phi^4)_2$ QFT with Space Cutoff.

神戸大 教育 加藤 祐輔
理 麦林 布道

§1. 序

場の量子論における漸近場の存在をFock spaceにおける場の作用素の強極限として証明する試みはRegular perturbationの場合[1],[2], Totally smooth perturbationの場合[3]にみられる。最近Glimm, Jaffe[4〜6]がSingular perturbation[7]によって$\lambda(\phi^4)_2$理論の解の存在証明に成功したのでここではこのモデルについて漸近場の存在を調べる。Regular perturbationの際にもちいた方法を拡張して適用するにあたりSingular perturbationに特有の問題と，このモデルにあって時空全体の次元数が4でなく2であることを適切に処理しなければならない。Asymptotic fieldsの存在，それらの間の正準交換関係の成立，Total Hamiltonianの Spectrum（の部分）などを明らかにすることができた。

§2. 定義および $\lambda(\phi^4)_2$ 理論における既知事項

質量 $m>0$ の中性スカラー場 $\phi(x)$ を扱う。

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{ikx} [a^*(k) + a(-k)] (2\omega(k))^{-\frac{1}{2}} dk ,$$

$$[a(k), a^*(k')] = \delta(k-k') ,$$

$$\omega(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}$$

$H_0 = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk$: Free Hamiltonian,

Ω_0 , $H_0 \Omega_0 = 0$; H_0 の最低固有状態

D : $\prod_{i=0}^{n} \phi(f_i) \Omega_0$ の1次結合

n 有限, $f_i \in \mathcal{S}(R^1)$,

D は Fock space $\mathcal{F}$ で稠密.

$$H = H_0 + \lambda \int :\phi^4(x): g(x) dx$$

$= H_0 + H_I$: Total Hamiltonian,

$\lambda g(x) \geqq 0$, $g(x) \in C_0^\infty(R^1(x))$

次の関係が知られている [4], [7]

$$H_0^2 + H_I^2 \leqq (1+\varepsilon)(H+b)^2 , \quad (2\cdot1)$$

$$\varepsilon H_0 + H_I + b \geqq 0 , \quad (2\cdot2)$$

$$\varepsilon H_0^2 + [H_0^{1/2}, [H_0^{1/2}, H_I]] + b \geqq 0 , \quad (2\cdot3)$$

$$\varepsilon N^3 + [N, [N, H_I]] + b \geqq 0 . \quad (2\cdot4)$$

$(2\cdot1)$, $(2\cdot2)$ は $D' \times D'$, $(2\cdot3)$, $(2\cdot4)$ は $D_0 \times D_0$ での2次形式として考える。ただし $D' \equiv D(H) = D(H_0) \cap D(H_I)$,

$D_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(H_0^n)$。 $\varepsilon > 0$は任意，bは十分大でいずれも各式につき異ってよい。なお$D^n = D(H^n)$，$D^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n$．

粒子数　$N = \int a^*(k) a(k)\, dk$　に対しては

$$mN \leqq H_0 \tag{2.5}$$

また H の最低スペクトルは縮退のない点スペクトルで

$$H\psi_0 = E_0 \psi_0$$

かつ H は $[E_0, E_0 + m - \varepsilon]$ でコンパクト作用素。

$f \in L^2(R_1)$ のとき

$$a\{f\} = \int a(k) f(k)\, dk$$

に対して

$$a_f(t) = e^{iHt} e^{-iH_0 t} a\{f\} e^{iH_0 t} e^{-iHt} = e^{iHt} a\{f e^{i\omega t}\} e^{-iHt}$$

を考え　$a_\pm\{f\} = \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\ a_f(t)$

の存在および次の関係を次§で調べたい。

$$[a_\pm\{f\}, a^*_\pm\{\bar{g}\}] = (f, g) \quad (f, g \in L^2),$$

$$[H, a_\pm\{f\}] = -a_\pm\{\omega f\} \quad (\omega f \in L^2) \text{ など},$$

$$a_\pm\{f\}\psi_0 = 0 \quad \text{など}。$$

なお

$$W_{jl} = \int w(k_1 \cdots k_l) a^*(k_1) \cdots a^*(k_j) a(-k_{j+1}) \cdots a(-k_l) \prod_{i=1}^{l} dk_i$$

$w(k) \in L^2(R^l)$，$\psi \in D((N+1)^{l/2})$ のとき [4]により

$$\| W_{jl} \psi \| \leqq \text{const.}\ \|w\| \cdot \|(N+l)^{l/2} \psi\| \tag{2.6}$$

§3. Asymptotic Fields の存在と H の Spectrum.

まず主要な結論を述べる。

定理 3.1. $\psi \in D^2$, $f \in L^2(R')$ のとき

$$a_\pm\{f\}\psi = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{iHt} a\{f e^{i\omega t}\} e^{-iHt}\psi$$
$$= a\{f\}\psi + i\int_0^{\pm\infty} dt\, e^{iHt}[H_I, a\{fe^{i\omega t}\}]e^{-iHt}\psi.$$

(a^* についても同様)

定理 3.2.

i) $a_\pm\{f\}\psi,\ a^*_\pm\{\bar{f}\}\psi \in D'$ $\quad (\psi \in D^3,\ f \in L^2)$,

ii) $[H, a_\pm\{f\}]\psi = -a_\pm\{\omega f\}\psi$, $[H, a^*_\pm\{\bar f\}]\psi = a^*_\pm\{\omega \bar f\}\psi$

$(\psi \in D^3,\ \omega f \in L^2)$.

定理 3.3. $\quad H\psi_j = E_j\psi_j \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \gamma$

$E_0 < E_1 \leq E_2 \leq \cdots \leq E_\gamma$ (γ: infinite でもよい)

(E_0, ψ_0 は §2 で定義).

に対して $\quad a_\pm\{f\}\psi_j = 0, \quad f \in L^2$

$$\prod_{i=0}^{n} a^*_\pm\{\bar f_i\}\psi_j \in \mathcal{F} \quad (n: 0, \text{正整数}).$$

定理 3.4 漸近場に対し正準交換関係が成る:

$[a_\pm\{f\}, a^*_\pm\{\bar g\}]\psi = (f, g)\psi$ など $\quad (\psi \in D^*)$.

以上の諸定理から

$$\mathcal{F} = \Big(\sum_{j=0}^{\gamma}\oplus \mathcal{F}_{j\pm}\Big)\oplus \mathcal{F}'_\pm ,$$

ここで $\mathcal{F}_{j\pm}$ は定理3.3で与えた要素で張られ，

$$U_{j\pm}\mathcal{F} = \mathcal{F}_{j\pm}$$

となるような等長作用素 $U_{j\pm}$ が存在する。 H の $\mathcal{F}_{j\pm}$ 上での spectrum は H_0 の $\mathcal{F}$ での spectrum と一致する。

定理3.1の証明はまず $f \in C_0^\infty(R^1)$ かつ $f(0) = f'(0) = 0$ なる f に対して与え，のちに $f \in L^2$ に拡張する。

まず $\frac{d}{dt} e^{iHt} a\{fe^{i\omega t}\} e^{-iHt}\psi$ を計算するために形式的な恒等式

$$\begin{aligned}
&\left(e^{iHt} a\{fe^{i\omega t}\} e^{-iHt} - a\{f\} \right)/t \\
&= e^{iHt} a\{fe^{i\omega t}\}\left(\frac{e^{-iHt}-1}{t} + iH\right) - e^{iHt} a\{fe^{i\omega t}\} iH \\
&\quad + e^{iHt} a\{F(f,t)\} + e^{iHt} a\{i\omega f\} + \left(\frac{e^{iHt}-1}{t} - iH\right) a\{f\} \\
&\quad + iHa\{f\}, \quad \left(F(f,t) = f\left(\frac{e^{i\omega t}-1}{t} - i\omega\right) \right),
\end{aligned}$$

を利用する。最後の2項を正しく扱うためには次の2つの Lemmas を必要とする。

Lemma 3.1. $\psi \in D^2$, $f \in C_0^\infty$ のとき

$$[H_I, a\{f\}]\psi \in \mathcal{F}.$$

Lemma 3.2. $\psi \in D^2$, $f \in C_0^\infty$ のとき

$$Ha\{f\}\psi = [H_I, a\{f\}]\psi - a\{\omega f\}\psi + a\{f\}H\psi.$$

さらに Lemma 3.1 の証明のために次の Lemma が必要。

Lemma 3.3. $\psi \in D^2$, $f(k_1, k_2, k_3) \in L^2(R^3)$ のとき

$$\left\| \int f(k_1 k_2 k_3)\, a^{\#}(k_1)\, a^{\#}(k_2)\, a^{\#}(k_3)\, dk_1 dk_2 dk_3 \psi \right\| < c \|f\| \cdot \|(H+b)^2 \psi\|,$$

ここで $a^{\#}$ は a または a^*, c は f, ψ に無関係。

（この Lemma の証明は §4）— 欄外［註］参照

以上の Lemmas によって $\psi \in D^2$, $f \in C_0^\infty$ のとき

$$\frac{d}{dt} a_f(t)\psi = i\, e^{iHt} [H_I, a\{f e^{i\omega t}\}] e^{-iHt} \psi$$

あるいは

$$a_f(t)\psi - a\{f\}\psi = i \int_0^t d\tau\, e^{iH\tau} [H_I, a\{f e^{i\omega\tau}\}] e^{-iH\tau} \psi .$$

$t \to \pm\infty$ は次の Lemmas により可能である。

Lemma 3.4.

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, e^{iH\tau} [H_I, a\{f e^{i\omega\tau}\}] e^{-iH\tau} \psi \right\| < c \|(H+b)^2 \psi\| \int_{t_1}^{t_2} d\tau\, F_f(\tau)^{\frac{1}{2}},$$

$$F_f(t) = \int dk_1 dk_2 dk_3 \left| \int dk \frac{f(k)}{\sqrt{\omega}} e^{i\omega t} \frac{g(k+k_1+k_2+k_3)}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \right|^2 .$$

c は $\psi \in D^2$, $f \in C_0^\infty$ に無関係（証明略）

Lemma 3.5. $f(k) \in C_0^\infty$, $f(0) = f'(0) = 0$ のとき

$t > B$ で $|F_f(t)| < A/t^3$ （A, B 十分大）（証明略

以上の Lemmas と［1］の才1論文，定理5・1の処方に従い定理3.1が証明される。他の定理についても同様に証明できる。

［註］研究会での報告では，証明は $\|\lambda g\|^2 <$ const. m^3 の条件のもとで可能であるとした。その後検討した結果この制限は不要であることが判明した。

§4. Lemma 3.3 の証明.

Lemma 4.1.

$$h_n(\alpha)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\frac{d\alpha_1\cdots d\alpha_n}{\omega(\alpha-\alpha_1)\cdots\omega(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})\omega(\alpha_{n-1})}\leqq M<\frac{2(2n)^n}{\pi n m},$$

$$\Gamma_g^2\equiv\int\frac{|g(\sum_{i=1}^4 k_i)|^2}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}dk_1dk_2dk_3dk_4<\frac{4^5}{\pi m}\|g\|^2$$

(証明略).

定義4.1. P_m : $\mathcal{F}$ の m 粒子状態への射影作用素,

$$Q_n=\sum_{m=0}^{n}P_m\ ,\ R_n=1-Q_n=\sum_{m=n+1}^{\infty}P_m\ ,$$

$$N_n=NQ_n+nR_n,\ N_{n\nu}=N_n+\nu\quad(n,\nu:0,\ 正整数).$$

定義4.2. $\psi\in D'$, $\{\phi_m\}$ は $\mathcal{F}$ 中の無限列で

$$\|P_n(\phi_m-\psi)\|^2+\|P_nH_0(\phi_m-\psi)\|^2\leqq\varepsilon_m^2(n+\rho)^{-\sigma},$$

$$P_n\phi_m\in P_nD\ ,\ \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m=0\ ,\ \rho>0,\ \sigma\geqq 2\ .$$

$\psi\in D'$ に対し上記の $\{\phi_m\}$ を少くとも1つえらびうることは容易に示される。 $\psi_m=Q_m\phi_m\in D\subset D'$ とおいたとき無限列 $\{\psi_m\}$ を ψ に σ-収束であると定義する.

まず2つの Lemmas を準備する。

Lemma 4.2. $\{\psi_m\}$ が $\psi\in D'$ に σ-収束とすると, $m\to\infty$ のとき

i) $\|\psi_m-\psi\|+\|H_0(\psi_m-\psi)\|\to 0\ (\sigma\geqq 2)$, ii) $\|H(\psi_m-\psi)\|\to 0\ (\sigma\geqq 6)$.

(証明). ii) が重要。 H_I が粒子数を最大で4個変化させることと, (2·6) 式から導かれる。 (詳細は略)

Lemma 4・3.　y：実数，$x>1$，$\psi\in D$　のとき

$$\| N^{y}_{n+\ell,\nu+\ell}[N^{x}_{n\nu},[N^{2}_{n\nu},W_{j\ell}]]\psi\| \leq \ell^2 x^2 \|w\|\cdot\| N^{2x+y-2+\ell/2}_{n+\ell,\nu+\ell}\psi\|.$$

（証明）．2重交換関係を具体的に書き，(2・6) をもちいる。

以上の準備のもとで，下記の Lemma 4.4，4.5 が証明され，それらによって Lemma 4.6，したがって Lemma 3・3. が証明される。

Lemma 4・4.　$\psi\in D^2$，$\nu\geq 0$，$0<\beta<m$　(m：質量)　のとき

$$\|(H+b)^2\psi\| \geq \beta\,\|(N+\nu)(H+b)\psi\|,$$

b は十分大，ψ に無関係な数．

（証明）．(2.1)，(2・5) から直ちに導かれる．

Lemma 4・5.　$\psi\in D^2$，$\nu\geq 1$，$0<\gamma<m$　のとき

$$\|N_{n\nu}(H+b)\psi\| \geq \gamma\,\|N_{n\nu}^2\psi\|,$$

b は十分大，ψ，n に無関係な数．

（証明）．$m>\theta>\gamma$ として

$$\|N_{n\nu}(H+b)\psi\|^2-\gamma^2\|N_{n\nu}^2\psi\|^2$$
$$=\|N_{n\nu}(H+b-\theta N_{n\nu}+\theta N_{n\nu})\psi\|^2-\gamma^2\|N_{n\nu}^2\psi\|^2$$
$$\geq \theta\{(N_{n\nu}^3\psi,(H+b-\theta N_{n\nu})\psi)+c.c.\}+(\theta^2-\gamma^2)\|N_{n\nu}^2\psi\|^2.$$

ここで ψ を σ-収束 ($\sigma\geq 6$) な無限列 $\{\psi_\ell\}$ で近似すると $N^{y}_{n\nu}\psi_\ell\in D'$，$N^{y}_{n\nu}H\psi_\ell\in\mathcal{F}$ であるため右辺才1項の評価が容易となる：

$$(N_{n\nu}^3 \psi_l, (H+b-\theta N_{n\nu})\psi_l) + c.c.$$
$$= 2(N_{n\nu}^{3/2}\psi_l, (H+b/2-\theta N_{n\nu}) N_{n\nu}^{3/2}\psi) + (\psi_l, [N_{n\nu}^{3/2}, [N_{n\nu}^{3/2}, H+b/2-\theta N_{n\nu}]]\psi_l)$$
$$\geqq (\psi_l, [N_{n\nu}^{3/2}, [N_{n\nu}^{3/2}, H_I]]\psi_l) \ . \quad (b \text{ 十分大}).$$

ここで Lemma 4.2, 4.3 などをもちいて

$$\| N_{n\nu}(H+b)\psi\|^2 - \gamma^2 \| N_{n\nu}^2 \psi\|^2$$
$$\geqq (\theta^2-\gamma^2)\|N_{n\nu}^2\psi\|^2 + \theta b \|N_{n\nu}^{3/2}\psi\|^2 - \theta\alpha\Gamma_g \| N_{n+4,\nu+4}^{3/2}\psi\|^2$$
$$-\theta(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

となる。α は単なる数値, $\varepsilon_1+\varepsilon_2 > 0$ は l に依存し $l\to\infty$ のとき十分小となりうるので b を十分大とすることにより右辺は正となる。(証明終り).

Lemma 4.6. $\psi \in D^2$ に対し

i) $\| N_n^2\psi\| \leq c \|(H+b)^2\psi\|$, c, b は n, ψ に無関係な正数。 i) から次の ii) が導かれる。

ii) $N^2\psi \in \mathcal{F}$ かつ $\| N^2\psi\| \leq c \|(H+b)^2\psi\|$

文献

[1] Y. Kato and N. Mugibayashi, P.T.P. 30, 103 (1963), N. Mugibayashi and Y. Kato, P.T.P. 31, 300 (1964).

[2] R. Höegh-Krohn, J.M.P. 9, 2075 (1968); 10, 639 (1969); 11, 185 (1970).

[3]. K.O. Friedrichs, Perturbation of spectra in Hilber space.

Amer. Math, Soc., Providence 1965.

[4] J. Glimm and A. Jaffe, Phys. Rev. 176, 1945 (1968).

[5] ——— ———, Ann. Math. 91, 362 (1970)

[6] ——— ———, To appear

[7] ——— ———, C.P.A.M 22, 401 (1969)